Содержание

Введение

При описании абстрактных типов данных известной конструкцией является описание с помощью квазитождеств. При этом, сам тип данных представляется в виде некоторой свободной системы квазимногообразия, порождённого этими квазитождествами. Элементы этой системы являются состояниями типа данных. Поэтому естественно требовать от типа данных, чтобы он принимал конечное количество состояний.

В соответствии с этим, стоит проблема: *определить, существует ли алгоритм определяющий по конечной системе Δ квазитождеств конечность свободной системы F факторизованной по отношению $\sim_\Delta$ (совокупность квазитождеств индуцирует на свободной системе отношение конгруэнтности).*

В данной работе исследуется вопрос конечности свободных систем квазимногообразия в произвольной конечной функциональной сигнатуре. Работа содержат четыре части:

- основные понятия;
- сигнатура с одной унарной операцией;
- несколько унарных операций;
- одна бинарная операция, общий случай.

Во второй части указан алгоритм, распознающий конечность. В третьей части приведено доказательство несуществования общего алгоритма (на основе теоремы Адяна-Рабина [1]). В четвёртой части работы рассмотрен случай, когда в сигнатуре присутствует две константы и одна бинарная операция; нераспознаваемость конечности следует из результата В.Ю.Попова [8]. А также рассмотрен случай конечной сигнатуры в которой присутствует либо несколько унарных операций, либо одна $(n+2)$-арная операция с двумя константами и показана нераспознаваемость конечности. В работе не рассмотрен случай, когда в сигнатуре не более одной константы и одна $(n+2)$-арная операция.

1. Основные понятия

Исходя из поставленной задачи понадобится несколько определений.

Определение 1.1. Формулы вида:

$$(\forall \bar{x})(a_1(\bar{x}) \& a_2(\bar{x}) \& \ldots \& a_m(\bar{x})),$$
$$(\forall \bar{x})((a_1(\bar{x}) \& a_2(\bar{x}) \& \ldots \& a_m(\bar{x})) \to a_0(\bar{x})),$$

где a_i - атомарные формулы от переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (переменные могут входить фиктивно), называются соответственно *тождествами* и *квазитождествами*. Мы будем рассматривать сигнатуру только с функциональными символами, поэтому все атомарные формулы представляют собой равенство термов:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(y_1, \ldots, y_k).$$

Совокупность квазитождеств Δ порождает квазимногообразие $\mathbf{K}_\Delta$ (класс алгебраических систем, на которых истинны формулы из Δ).

В данной работе используются понятия независимых элементов и свободных систем [5, гл. V, §12.2].

Определение 1.2. Пусть заданы алгебраическая система $\mathcal{F}$ и квазимногообразие $\mathbf{K}$ некоторой сигнатуры Σ. Непустая совокупность S каких-то элементов из $\mathcal{F}$ называется *независимой* в $\mathcal{F}$ *относительно класса* $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$-независимой), если произвольное отображение S в любую $\mathbf{K}$-систему $\mathfrak{M}$ может быть продолжено до гомоморфизма $\bar{S}$ в $\mathfrak{M}$, где $\bar{S}$ - подсистема, порождённая элементами S, в $\mathcal{F}$.

Алгебраическая система $\mathcal{F}$ называется *свободной относительно класса* $\mathbf{K}$, если в $\mathcal{F}$ существует совокупность S элементов, $\mathbf{K}$-независимая и порождающая систему $\mathcal{F}$. Совокупность S, обладающая этими свойствами, называется $\mathbf{K}$-*свободным базисом* системы $\mathcal{F}$.

Система $\mathcal{F}$ называется *свободной системой ранга* $\mathfrak{n}$ *в классе* $\mathbf{K}$ (символически $\mathcal{F} = \mathbb{F}_\mathfrak{n}$), если $\mathcal{F} \in \mathbf{K}$ и в $\mathcal{F}$ существует $\mathbf{K}$-свободный базис мощности $\mathfrak{n}$.

Важно, что любая $\mathbf{K}$-система с порождающей совокупностью мощности $\mathfrak{n}$ является гомоморфным образом свободной системы $\mathbb{F}_\mathfrak{n}$ [5, стр. 316]. Именно поэтому существенным является то, что мы рассматриваем не произвольную систему из $\mathbf{K}$, а только свободную некоторого конечного ранга.

2. Решение проблемы в случае одной унарной операции

Пусть задана сигнатура $\Sigma = \{f^1\}$ (верхний индекс означает местность операции). Квазитождество имеет вид:

$$(\forall \bar{x})(\mathop{\&}_{t=1}^{s} f^{k_t}(x_{i_t}) = f^{l_t}(x_{j_t})) \to f^{k_0}(x_{i_0}) = f^{l_0}(x_{j_0}), \tag{2.1}$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $1 \leqslant i_t, j_t \leqslant n$; $k_t, l_t \geqslant 0$ и $f^0(x) = x$. **K**-свободная система $F(\xi_1, \ldots, \xi_{\mathfrak{n}})$ с порождающими $\{\xi_1, \ldots, \xi_{\mathfrak{n}}\}$ будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} F(\xi_1, \ldots, \xi_{\mathfrak{n}}) = \{&\xi_1, f(\xi_1), f^2(\xi_1), \ldots, \\ &\xi_2, f(\xi_2), f^2(\xi_2), \ldots, \\ &\ldots \\ &\xi_{\mathfrak{n}}, f(\xi_{\mathfrak{n}}), f^2(\xi_{\mathfrak{n}}), \ldots\} \end{aligned}$$

Покажем это. Возьмём произвольную систему $\mathfrak{M} \in \mathbf{K}$. Отобразим элементы

$$\xi_i \stackrel{\sigma}{\mapsto} a_i \ (i = 1, \ldots, \mathfrak{n}),$$

где $a_i \in \mathfrak{M}$. Продолжим отображение σ до гомоморфизма следующим образом:

$$\sigma f^k(\xi_i) = f^k(a_i) \ (k = 1, 2, \ldots)$$

(условие гомоморфизма $f(\sigma\zeta) = \sigma f(\zeta)$, очевидно, выполняется).

Теперь рассмотрим **K**-свободную систему произвольного конечного ранга $\mathfrak{n}$. Фактически, это система $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}} := F(\xi_1, \ldots, \xi_{\mathfrak{n}})/\sim_\Delta$, которая получается следующей факторизацией: отношение эквивалентности $\sim_\Delta$ – это равенства термов, объявленные в правых частях квазитождеств (при конкретных подстановках выражений $f^k(\xi_i)$ вместо переменных). Ясно, что это отношение будет конгруэнцией (поскольку определяет равенство в системе, а образы равных элементов равны). Построением гомоморфизма, аналогичного построенному выше, можно показать, что система $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}}$ свободна.

Далее, покажем, что достаточно исследовать конечность системы $\mathbb{F}_1 = F(\xi)/\sim_\Delta$.

Предложение 2.1. $\mathbb{F}_1$ - *конечна* $\Longleftrightarrow$ *для любого натурального* $\mathfrak{n}$ $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}}$ - *конечна.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) очевидно (берем $\mathfrak{n} = 1$).

($\Rightarrow$) Рассмотрим отображения

$$\sigma_i : \xi \mapsto \xi_i \ (i = 1 \ldots \mathfrak{n}).$$

Каждое σ_i можно продолжить до гомоморфизма. Тогда для любого l выполнено $f^l(\xi_i) = \sigma_i f^l(\xi)$. Конечность $\mathbb{F}_1$ означает, что существует N такое, что для любого $l \geqslant N$ найдётся $k < N$, что

$$f^l(\xi) = f^k(\xi).$$

Следовательно, их образы при произвольном отображении f^m тоже равны. То есть $\overline{\{\xi_i\}}$ - конечное множество. $\square$

Предложение 2.2. *$\mathbb{F}_1$ конечна $\iff$ существуют натуральные k и $l > 0$ такие, что $\mathbb{F}_1 \vDash \exists x f^k(x) = f^{k+l}(x)$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Допустим противное, то есть для любых k и $l \neq 0$ выполняется:

$$\mathbb{F}_1 \nvDash \exists x f^k(x) = f^{k+l}(x)$$

или

$$\mathbb{F}_1 \vDash \forall x f^k(x) \neq f^{k+l}(x).$$

Это означает, что

$$\xi \neq f(\xi) \neq f^2(\xi) \neq \dots$$

Имеем бесконечное количество неравных элементов.

($\Leftarrow$) $\mathbb{F}_1 \vDash \exists x f^k(x) = f^{k+l}(x)$. Допустим $x = [f^m(\xi)]$ (обозначение класса эквивалентности). Тогда

$$f^k([f^m(\xi)]) = f^{k+l}([f^m(\xi)]),$$

то есть

$$[f^{k+m}(\xi)] = [f^{k+l+m}(\xi)].$$

Теперь применяем слева и справа f^s:

$$[f^{k+m+s}(\xi) = f^{k+m+l+s}(\xi)].$$

Это означает, что любой элемент $f^t(\xi)$, где $t \geqslant k+l+m$ эквивалентен $f^p(\xi)$, где $p = k + m + ((t-(k+m)) \bmod l) < k+l+m$ $\square$

Опишем далее алгоритм α, который будет определять конечна ли $\mathbb{F}_1$.

$$\alpha(\Delta) = \begin{cases} 0, \text{если } F(\xi)/\sim_\Delta \text{ конечна;} \\ 1, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(I) Если в Δ есть тождества вида

$$\forall x \forall y \ f^k(x) = f^{k+l}(y) \ (l \geqslant 0) \qquad (1)$$

$$\forall x \ f^k(x) = f^{k+l}(x) \ (l > 0) \qquad (2)$$

то $\alpha(\Delta) = 0$ (так как (i) $\vdash \exists x f^k(x) = f^{k+l}(x)$ (i $= 1, 2$)). Будем считать, что различные термы не равны (система бесконечна), так как в противном случае алгоритм заканчивает работу.

(II) Рассмотрим квазитождество $r \in \Delta$, r имеет вид (2.1).

(II.а) r можно переписать в виде:

$$(\forall x \forall y \forall \bar{z})(\mathop{\&}_{t=1}^{s} A_t(x, y, \bar{z}) \to f^k(x) = f^{k+l}(y)),$$

где $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ - кортеж элементов, $A_t(x, y, \bar{z}) = (f^{k_t}(x_{i_t}) = f^{k_t+l_t}(x_{j_t}))$, переменные x_{i_t} и x_{j_t} выбраны из $\{x, y, z_1, \ldots, z_m\}$. Преобразуем в эквивалентный вид:

$$(\forall x \forall y) \left((\exists \bar{z} \exists v \exists w)(\mathop{\&}_{t=1}^{s} A_t(v, w, \bar{z}) \& x = v \& y = w) \right) \to f^k(x) = f^{k+l}(y)$$

(II.б) рассмотрим посылку

$$f^{k_1}(x_{i_1}) = f^{k_1+l_1}(x_{j_1}) \,\&\, \ldots \,\&\, f^{k_s}(x_{i_s}) = f^{k_s+l_s}(x_{j_s}) \,\& \qquad (*)$$
$$\& \, x = v \,\&\, y = w$$

где $x_{i_t}, x_{j_t} \in \{v, w, z_1, \ldots, z_m\}$.Выбрасываем те равенства, где $x_{i_t} = x_{j_t}$ и $l_t = 0$ (тривиальные). Различные термы не равны, следовательно

$$f^{k_t}(x_{i_t}) = f^{k_t+l_t}(x_{j_t}) \Longleftrightarrow x_{i_t} = f^{l_t}(x_{j_t}).$$

(II.в) (*) преобразуется в

$$x_{i_1} = f^{l_1}(x_{j_1}) \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i_s} = f^{l_s}(x_{j_s}) \,\&\, x = v \,\&\, y = w$$

или

$$A'_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A'_s \,\&\, x = v \,\&\, y = w. \quad (**)$$

(II.в.1) если $x_{i_s} = x_{j_s}$, то идём на (II.в.2), иначе заменяем во всех выражениях A'_t $(t = 1 \ldots s-1)$ вхождения переменной x_{i_s} на $f^{l_s}(x_{j_s})$. Получаем

$$(\exists \bar{z}, v, w)(x_{i_s} = f^{l_s}(x_{j_s}) \mathop{\&}_{t=1}^{s-1} A'_t(v, w, \bar{z}')) \Longleftrightarrow$$
$$(\exists \bar{z}', v, w)(\mathop{\&}_{t=1}^{s-1} A'_t(v, w, \bar{z}')),$$

где $\bar{z}' = \{z_1, \ldots, z_m\} \setminus \{x_{i_s}\}$. Это можно сделать ввиду того, что существование x_{i_s} следует из существования x_{j_s}. Теперь $s := s - 1$. Если $s = 0$, то на пункт (II.в.3), иначе на (II.в).

(II.в.2) $x_{i_s} = x_{j_s}$ $(l_s \neq 0)$, тогда $x_{i_s} \neq f^{l_s}(x_{j_s})$ так как термы неравны и, значит, посылка не выполняется, квазитождество становится истинным для любых x и y (то есть оно не нарушает предположения о том, что система бесконечна). Следующим шагом $\Delta := \Delta \setminus \{r\}$. Если $\Delta = \varnothing$, то $\alpha = 1$, иначе на `(II)`.

`(II.в.3)` $s = 0$ и преобразованное квазитождество имеет вид:

$$(\forall x \forall y \forall z' \forall z'')(x = f^p(z') \& y = f^q(z'') \to f^k(x) = f^{k+l}(y)) \quad \texttt{(1)}$$

или

$$(\forall x \forall y \forall z)(x = f^p(z) \& y = f^q(z) \to f^k(x) = f^{k+l}(x)) \quad \texttt{(2)}$$

Ясно, что

$$\texttt{(1)} \vdash \exists x f^{k'}(x) = f^{k'+l'}(x)$$

и $\alpha = 0$. Во втором же случае, если $k + p \neq k + l + q$, то получаем $\alpha = 0$, иначе $\Delta := \Delta \setminus \{r\}$. Проверяем, если $\Delta = \varnothing$, то $\alpha = 1$, иначе на пункт `(II)`.

Замечание 2.3. Если квазитождество имеет вид

$$\forall x \forall \bar{z} \mathop{\&}_{t=0}^{s} A_t(x, \bar{z}) \to f^k(x) = f^{k+l}(x),$$

то его можно переписать в эквивалентном виде

$$\forall x \forall y \forall \bar{z} \mathop{\&}_{t=0}^{s} A_t(x, \bar{z}) \& x = y \to f^k(x) = f^{k+l}(y)$$

3. Неразрешимость для сигнатуры с несколькими унарными операциями

Пусть $\Sigma = \{f^1, g^1, \ldots, h^1\}$. Покажем, что проблема конечности $F_\Sigma(\xi)/\sim_\Delta$ неразрешима для совокупности тождеств вида

$$(\forall x) w_1(x) = w_2(x) \ (w_1, w_2 \in \Sigma^*).$$

Приведем здесь известный результат алгоритмической нераспознаваемости свойства конечности конечно-определённых групп [1].

Определение 3.1. *Полугруппой (ассоциативной системой)* A называется алгебраическая система $\langle A, \cdot^2 \rangle$, в которой выполняется аксиома ассоциативности:

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c) \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Пусть задан конечный алфавит $\mathcal{S}$. Очевидно, множество $\mathcal{S}^*$ всех конечных слов в алфавите $\mathcal{S}$ образует свободную полугруппу относительно бинарной операции приписывания одного слова к другому. При этом, пустое слово играет роль единицы и обозначается через 1.

Определение 3.2. Пусть задано некоторое множество $\mathcal{D}$ упорядоченных пар слов в алфавите $\mathcal{S}$. Упорядоченную пару слов $\langle A, B \rangle$ при задании полугруппы будем записывать в виде равенства $A = B$. Эти равенства, называемые *определяющими соотношениями*, определяют на множестве всех слов некоторое *отношение эквивалентности*, факторизация по которому переводит свободную полугруппу $\mathcal{S}^*$ в полугруппу, заданную определяющими соотношениями множества $\mathcal{D}$ и обозначаемую через

$$A = \langle\, \mathcal{S} \,|\, \mathcal{D} \,\rangle.$$

Отношение равенства слов в таким образом заданной полугруппе A определяется следующим образом.

Левым (правым) элементарным преобразованием, отвечающим определяющему соотношению $A = B$, называется любой переход вида

$$UAV \to UBV \ (UBV \to UAV)$$

где U и V - произвольные слова.

Два слова P и Q в алфавите $\mathcal{S}$ называются *эквивалентными в полугруппе* A (обозначаем $\sim_\mathcal{D}$), если либо $P \equiv Q$ (графически совпадают), либо существует цепочка элементарных преобразований вида

$$P \equiv P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_k \equiv Q$$

(записывается $P = Q$ в A).

Очевидно, определённое таким образом отношение эквивалентности согласовано с операцией умножения слов, то есть если $P_1 = Q_1$ и $P_2 = Q_2$, то $P_1P_2 = Q_1Q_2$ и является конгруэнтностью.

Элементами полугруппы A являются классы эквивалентности $[X]$, состоящие из всех слов, эквивалентных слову X. Полугруппа A представляет собой множество всех классов эквивалентности с ассоциативной операцией $[X]\cdot[Y] := [XY]$, результат которой не зависит от выбора представителей X, Y классов эквивалентности.

Определение 3.3. Полугруппа $A(\mathcal{S})$ *конечно-определена*, если на ней задано конечное число определяющих соотношений и множество $\mathcal{S}$ конечно. Задание полугруппы $A(\mathcal{S}, \mathcal{D})$ может быть записано в виде

$$\langle\, a_1, \ldots, a_n \,|\, A_1 = B_1, \ldots, A_m = B_m \,\rangle.$$

Для того, чтобы полугруппа с единицей была группой, достаточно, чтобы в ней имелись обратные элементы для всех порождающих. Задание групп с помощью образующих и определяющих соотношений осуществляется следующим образом.

К данному исходному алфавиту

$$\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_n\} \tag{3.1}$$

добавляется алфавит «двойников», называемых обратными степенями образующих

$$\mathcal{S}^{-1} = \{a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}\}.$$

Полученное объединение называется групповым алфавитом. При задании любой группы с порождающими (3.1) для обеспечения того, чтобы буквы a_i^{-1} были обратными для букв a_i, служат *тривиальные определяющие соотношения* имеющие вид:

$$a_i^{-1}a_i = 1, a_ia_i^{-1} = 1. \tag{3.2}$$

Для задания группы к тривиальным соотношениям (3.2) добавляются определяющие соотношения в групповом алфавите, которые в данном случае всегда можно записать в виде равенств

$$A_i = 1 (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.3}$$

Так как добавление обратных степеней образующих (3.1) и тривиальных соотношений (3.2) однозначно определяется заданием множества порождающих

(3.1), то обычно говорят о группе G, заданной порождающими (3.1) и определяющими соотношениями (3.3), и записывают это задание в виде:

$$\langle\langle\, a_1, \dots, a_n \,|\, A_1 = 1, \dots, A_m = 1 \,\rangle\rangle \tag{3.4}$$

Пусть группы G_1 и G_2 конечно определены:

$$G_1 = \langle\langle\, \mathcal{S}_1 \,|\, \mathcal{D}_1 \,\rangle\rangle, \quad G_2 = \langle\langle\, \mathcal{S}_2 \,|\, \mathcal{D}_2 \,\rangle\rangle.$$

Если множества $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ не пересекаются, то группа

$$G_1 * G_2 := \langle\langle\, \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \,|\, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \,\rangle\rangle \tag{3.5}$$

называется *свободным произведением групп* G_1 *и* G_2.

Пусть в группах G_1 и G_2 выделены две подгруппы

$$H_1 = \langle A_1, \dots, A_k \rangle_{G_1} \text{ и } H_2 = \langle B_1, \dots, B_k \rangle_{G_2}$$

причем соответствие

$$A_i \overset{\varphi}{\mapsto} B_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

порождает изоморфное отображение G_1 на G_2

Определение 3.4. *Свободным произведением групп* G_1 *и* G_2 *с объединенными подгруппами* $H_1 \cong H_2$ называется группа

$$\langle\langle\, \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \,|\, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, A_1 = B_1, \dots, A_k = B_k \,\rangle\rangle.$$

Можно считать, что порождающие выделенных подгрупп $\{A_j\}_{j=1}^k$ и $\{B_j\}_{j=1}^k$ входят в число исходных образующих соответствующих групп. Для этого достаточно добавить в задания групп G_1 и G_2 новые образующие $c_1, \dots, c_k$ и приравнять их соответствующим словам $A_1, \dots, A_k$ и $B_1, \dots, B_k$. Поэтому мы будем считать, что заданы две конечно-определенные группы

$$G_1 = \langle\langle\, \mathcal{S}_1' \cup \mathcal{S}_0 \,|\, \mathcal{D}_1 \,\rangle\rangle \text{ и } G_2 = \langle\langle\, \mathcal{S}_2' \cup \mathcal{S}_0 \,|\, \mathcal{D}_2 \,\rangle\rangle, \tag{3.6}$$

причем $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_i' \cup \mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1' \cap \mathcal{S}_2' = \varnothing$ и объединяемые подгруппы H_1 и H_2 порождаются образующими $\mathcal{S}_0 = \{c_1, \dots, c_k\}$ в группах G_1 и G_2, соответственно. Изоморфизм подгрупп H_1 и H_2 означает, что для любого слова X в алфавите $\mathcal{S}_0$

$$X = 1 \text{ в } G_1 \iff X = 1 \text{ в } G_2$$

Тогда свободное произведение групп G_1 и G_2 с объединенными подгруппами, порожденными в них множеством $\mathcal{S}_0$, имеет задание

$$\langle\langle\, \mathcal{S}_1' \cup \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_2' \,|\, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \,\rangle\rangle \tag{3.7}$$

Далее будет приведена теорема без доказательства, его можно найти в [1].

Теорема 3.5. *Если G_3 есть свободное произведение (3.7) групп G_1 и G_2 с объединенными подгруппами, то каждая из этих групп является подгруппой в G_3*

Лемма 3.6. (лемма Миллера). *Пусть (3.4) есть произвольная конечно-определённая группа, а w - любое слово в её алфавите. Обозначим через G_w группу со следующим заданием:*

$$\begin{aligned}\langle\langle\, a_1, a_2, \ldots, a_m, a, b, c \,|\, \Delta,\\ a^{-1}ba &= c^{-1}b^{-1}cbc,\\ a^{-2}b^{-1}aba^2 &= c^{-2}b^{-1}cbc^2,\\ a^{-3}[w,b]a^3 &= c^{-3}bc^3,\\ a^{-(3+i)}a_iba^{(3+i)} &= c^{-(3+i)}bc^{(3+i)},\ i = 1, 2, \ldots, m\,\rangle\rangle,\end{aligned}$$

где a, b и c - новые буквы.
Группа G_w порождается двумя элементами b и ca^{-1}.
Если $w = 1$ в группе G, то G_w - единичная группа.
Если $w \neq 1$ в группе G, то - подгруппа группы G_w.

Доказательство. Очевидно, первое соотношение группы G_w можно переписать в виде $c = b(ca^{-1})^{-1}b^{-1}$, а последняя серия соотношений позволяет выразить все порождающие a_i через a, b, c, что завершает доказательство первого утверждения леммы.

Пусть $w = 1$ в группе G. Тогда из соответствующих соотношений получаем сначала $b = 1$, затем $c = 1$ и $a = 1$. Следовательно, группа G_w - единичная.

Пусть $w \neq 1$ в группе G. В свободной группе с порождающими d и c элементы d, $c^{-1}d^{-1}cdc$, $c^{-2}d^{-1}cdc^2$, $c^{-3}bc^3$, $c^{-(3+i)}dc^{(3+i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ являются свободными образующими порожденной ими подгруппы H_1.

Аналогично, в свободном произведении $G * \langle\langle a, b\rangle\rangle$, элементы b, $a^{-1}ba$, $a^{-2}b^{-1}aba^2$, $a^{-3}[w,b]a^3$, $a^{-(3+i)}a_iba^{(3+i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ также являются свободными образующими порожденной ими подгруппы H_2.

Группа G_w является свободным произведением групп $G * \langle\langle a, b\rangle\rangle$ и $\langle\langle d, c\rangle\rangle$ с объединением по подгруппам H_1 и H_2. Следовательно, по теореме 3.5 G - подгруппа группы G_w. □

Далее мы воспользуемся результатом С.И. Адяна и М.О. Рабина о том, что *любое марковское групповое свойство алгоритмически нераспознаваемо.*

Определение 3.7. Инвариантное групповое свойство (то есть не меняющееся при изоморфизме) α называется *марковским*, если существует конечно-определённая группа со свойством α и конечно-определённая группа, не вложимая ни в какую конечно-определённую группу со свойством α.

Свойство конечности группы, очевидно, является марковским. Оно сохраняется при изоморфизме, $G^+ = \langle\langle\, a, b \,|\, a = b,\ a^2 = a \,\rangle\rangle$ - конечно-определённая группа являющаяся конечной, а группа $G^- = \langle\langle\, a \,|\, \varnothing \,\rangle\rangle$ не вложима ни в какую конечную группу, так как сама является бесконечной.

Теорема 3.8. (Адян С.И.,Рабин М.О.) *Не существует общего алгоритма распознавания марковского свойства всех конечно-определённых групп.*

Следовательно, не существует алгоритма распознавания конечности всех конечно-определённых групп.

Теперь укажем соответствие между конечно-определённой группой и фактор системой $F(\xi_1, \ldots, \xi_\mathfrak{n})/\sim_\Delta$. Вспомним задание конечно-определённой группы.

$$G = \langle\langle\, a_1, \ldots, a_n \,|\, A_1 = 1, \ldots, A_m = 1 \,\rangle\rangle =$$
$$\langle\, a_1, \ldots, a_n, {a_1}^{-1}, \ldots, {a_n}^{-1} \,|\, \{A_j = 1\}_{j=1}^m, \{{a_i}^{-1}a_i = a_i{a_i}^{-1} = 1\}_{i=1}^n \,\rangle =$$
$$\langle\, \mathcal{S} \,|\, \mathcal{D} \,\rangle$$

Далее, каждому элементу a_i и ${a_i}^{-1}$ сопоставим унарную операцию в Σ - a_i и ${a_i}^{-1}$ соответственно, то есть $\Sigma = \mathcal{S}$. Каждому определяющему соотношению $A = 1 \in \mathcal{D}$ сопоставим тождество:

$$A = 1 \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow (\forall x)A(x) = x \in \Delta.$$

Получили совокупность тождеств Δ.

Предложение 3.9. $F = F_\Sigma(\xi_1, \ldots, \xi_\mathfrak{n})/\sim_\Delta$ *конечна* $\Longleftrightarrow G = \langle\, \mathcal{S} \,|\, \mathcal{D} \,\rangle$ *конечна.*

Доказательство. $(\Leftarrow)$ $\langle\, \mathcal{S} \,|\, \mathcal{D} \,\rangle$ конечна, значит существует конечное количество слов $w_1, w_2, \ldots, w_n$ таких, что они неэквивалентны в группе G и любой другой элемент $w \in \mathcal{S}^*$ эквивалентен некоторому w_i. Возьмём произвольный элемент $w(\xi_\mathfrak{m}) \in F$, тогда для некоторого i в группе G $w \sim_\mathcal{D} w_i$, то есть существует цепочка левых и правых преобразований $w \doteq P_0 \to \ldots \to P_l \doteq w_i$, где $P_j \to P_{j+1}$ получается следующим образом

$$P_j \doteq UV \to UAV \doteq P_{j+1}$$
или
$$P_j \doteq UAV \to UV \doteq P_{j+1},$$

где $U, V \in \mathcal{S}^*, A = 1 \in \mathcal{D}$. Рассмотрим тождество $(\forall x)x = A(x)$. Возьмём $x = V(\xi_{\mathfrak{m}})$. Тогда в F выполнено $V(\xi_{\mathfrak{m}}) = AV(\xi_{\mathfrak{m}})$. Применим последовательно операции, соответствующие буквам слова U, тогда $UV(\xi_{\mathfrak{m}}) = UAV(\xi_{\mathfrak{m}})$. Получили, что $P_j(\xi_{\mathfrak{m}}) = P_{j+1}(\xi_{\mathfrak{m}})$. Далее, по транзитивности равенства: $w(\xi_{\mathfrak{m}}) = w_i(\xi_{\mathfrak{m}})$. Значит в F произвольный элемент $w(\xi_{\mathfrak{m}})$ эквивалентен некоторому элементу из конечного множества, то есть система F конечна.

($\Rightarrow$)Рассмотрим тождества из Δ:

$$\forall x A_i(x) = x.$$

Теперь, подставляя вместо $x = V(\xi),\ \xi \in \{\xi_1, \dots, \xi_{\mathfrak{n}}\}$, получим:

$$A_i V(\xi) = V(\xi).$$

Применяем последовательно операции $c_k, c_{k-1}, \dots, c_1$ $(c_1 c_2 \dots c_k = U)$, получим:

$$U A_i V(\xi) = UV(\xi).$$

Если $w(\xi) \sim_\Delta v(\xi)$ в F, то $\exists P_0(\xi), P_1(\xi), \dots, P_l(\xi)$ т.что

$$P_j(\xi) = UV(\xi) \sim UA_iV(\xi) = P_{j+1}(\xi),$$

или

$$P_j(\xi) = UA_iV(\xi) \sim UV(\xi) = P_{j+1}(\xi).$$

Но это выполняется тогда и только тогда, когда $w \sim_{\mathcal{D}} v$ в группе G.

Если F конечна, то в ней есть конечное множество элементов, которым все остальные эквивалентны. Заметим, что произвольные элементы $w(\xi)$ и $v(\eta)$, где $\xi \neq \eta,\ \xi, \eta \in \{\xi_1, \dots, \xi_{\mathfrak{n}}\}$, не могут быть эквивалентны ввиду того, что в тождествах участвует только один порождающий элемент. Поэтому система F разбивается на объединение $\mathfrak{n}$ изоморфных друг другу подсистем (изоморфизм строится простой заменой $\xi_{\mathfrak{i}} \mapsto \xi_{\mathfrak{j}}$). Итак, если F конечна, то существует конечное множество $w_1, \dots, w_n$ слов из Σ^* такое, что любое слово $w(\xi),\ \xi \in \{\xi_1, \dots, \xi_{\mathfrak{n}}\}$ эквивалентно некоторому $w_i(\xi)$. Это и означает, что $w \sim_{\mathcal{D}} w_i$, то есть конечность G.

$\square$

4. Случай произвольной сигнатуры

Пусть $\Sigma = \{\cdot^2, a^0, b^0\}$, то есть a, b -константы. Пусть Δ - множество, состоящее из следующих тождеств:

$$\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \tag{1}$$

$$\forall x\ x^p = x^q, \tag{2}$$

где $p > q \geqslant 2$. Они порождают многообразие $\mathfrak{B}_{p,q}$ (класс всех алгебраических систем данной сигнатуры, на которых они истинны).

Теорема 4.1. (Попов В.Ю. [8]) *Не существует общего алгоритма распознавания конечности конечно-определённых полугрупп многообразия* $\mathfrak{B}_{p,q}$.

Из этой теоремы несложно получить

Следствие 4.2. *Не существует единого алгоритма, распознающего конечность всех систем* $F_\Sigma / \sim_{\Delta_1}$*, где* F_Σ *- свободная система ранга* 0 *в подмногообразии* $\mathfrak{B}_{p,q} \cap \mathbf{K}_{\Delta_1}$, $\Delta_1 \supseteq \Delta$.

Доказательство. Пусть Δ_1 кроме тождеств (1) и (2) содержит только тождества, вида:

$$\forall x\ w = v,$$

где $w, v \in \{a, b\}^*$.

Система $F_\Sigma / \sim_{\Delta_1}$ представляет собой конечно-оперделённую полугруппу с порождающими $\{a, b\}$ и с определяющими соотношениями $\Delta_1 \setminus \{(1), (2)\}$. Из теоремы следует, что проблема распознавания конечности для таких систем не разрешима. $\square$

Теперь пусть задана некоторая конечная сигнатура. Если в ней есть $(n+2)$-арная операция f и хотя бы две константы, то, задав тождество

$$\forall xy \forall \bar{x} \forall \bar{y}\ f(x, y, \bar{x}) = f(x, y, \bar{y}),$$

получаем фактическую бинарную операцию (значение функции не зависит от переменных x_i), остальные функции $g \in \Sigma$ определяем тождествами

$$\forall \bar{x} \forall \bar{y}\ g(\bar{x}) = g(\bar{y}).$$

В этом случае, в силу последней теоремы, конечность не распознаётся.

Если в сигнатуре присутствуют константы, то там, где не существует алгоритма, распознающего конечность, они ничего не меняют, так как их можно считать порождающими свободной системы.

Рассмотрим случай одной унарной операции. Если константы присутствуют только в посылках квазитождеств, то их можно заменить переменными. Следующий пример иллюстрирует это (c - константа):

$$\forall x, y, z f(x) = f^2(c) \to f^3(y) = f^4(z) \Longleftrightarrow$$
$$\forall y, z (\exists x f(x) = f^2(c)) \to f^3(y) = f^4(z) \Longleftrightarrow$$
$$\forall y, z (\exists x \exists u f(x) = f^2(u)) \to f^3(y) = f^4(z) \Longleftrightarrow$$
$$\forall x, y, z, u f(x) = f^2(u) \to f^3(y) = f^4(z)$$

Если же константы присутствуют в правой части, то в проверке конечности можно использовать следующие эквивалентности:

$$f^k(c) = f^{k+l}(x) \Longleftrightarrow f^l(x) = c \Longleftrightarrow$$
$$\exists p, q\ c = f^p(\xi) \,\&\, x = f^q(\xi) \,\&\, c = f^l(x) \Longleftrightarrow f^p(\xi) = f^{q+l}(\xi)$$

Случай $f^k(c) = f^{k+l}(d)$ (c, d - константы) разбирается аналогично.

Для случая, когда в сигнатуре не более одной константы и только одна $(n+2)$-арная операция, вопрос пока остаётся открытым.

Заключение

В работе получен результат о том, что нельзя общим алгоритмом распознать конечность свободных систем в сигнатуре, содержащей более двух $(n+1)$-арных операций $(n > 0)$. Распознать конечность можно когда сигнатура состоит из одной унарной операции (ещё могут быть константы). Однако, такой язык описания абстрактных типов данных весьма беден. Решение вопроса о сигнатуре с одной $(n + 2)$-арной операцией тоже не даст богатого языка. Поэтому следующим шагом в распознавании конечности свободных систем необходимо должна являться конкретизация класса квазитождеств

Например, если задана сигнатура $\Sigma = \{f_1, \dots, f_n\}$ унарных операций, то в случае, когда на ней заданы тождества вида

$$\forall x w(x) = v(x),$$

где $w, v \in \Sigma^*$ и длины w и v являются фиксированными равными величинами, свободная система будет бесконечной (слова неравной длины - неэквивалентны).

Список литературы

1. *Адян С.И. Дурнев В.Г.* Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Успехи математических наук. 2000, Т.55, No 2. С.4-94.
2. *Гончаров С.С.* Модели данных и языки их описаний. // Вычислительные системы. No 107. С.52-70.
3. *Ильичева О.А.* О семантике квазитождеств определяющих модели констант. // Вычислительные системы. No 116. С.16-32.
4. *Касымов Н.Х., Морозов А.С.* Логические аспекты теории абстрактных типов данных. // Вычислительные системы. No 122, С.73-96.
5. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. — М.: Наука. 1970. С.312-322.
6. *Он же* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука. 1986. С.254-263.
7. *Марков А.А.* Теория алгорифмов. (*Труды мат. ин-та им. Стеклова N42, 1954*).
8. *Попов В.Ю.* Марковские свойства бернсайдовских многообразий групп. // Алгебра и логика. 2003,Т.42, No 1. С.94-106.