Содержание

Введение

В работе С.С.Гончарова и Дж.Найт [2] дана классификация классов вычислимых моделей с заданными теоретико-модельными свойствами на структурные и неструктурные. В рамках этих исследований интересен ответ на вопрос, а какова сложность естественных классов вычислимых моделей? В данной работе рассматриваются три таких класса и приводятся точные, верхние и нижние оценки их сложности.

Приведем здесь основные определения. Зафиксируем вычислимый язык Σ - предикатную сигнатуру. Модель $\mathfrak{M}$ этого языка называется **вычислимой**, если её базисное множество и базисные предикаты равномерно вычислимы. По [1] существует нумерация $\mathcal{E} = \{\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots\}$ всех вычислимых моделей этой сигнатуры (мы будем рассматривать модели, основаниями которых служат вычислимые множества).

Определение 1. *Индексным множеством* называется подмножество индексов моделей нумерации, выбранных по какому-то свойству.

Задача работы заключается в оценке некоторых индексных множеств известных классов вычислимых моделей в арифметической иерархии. Требуется оценить сложность индексных множеств следующих классов вычислимых моделей:

- $\mathbf{K} = \{i \mid \mathfrak{M}_i$ - конечна$\}$
- $\mathbf{C} = \{i \mid \mathfrak{M}_i$ - имеет $\aleph_0$-категоричную теорию$\}$
- $\mathbf{UC} = \{i \mid \mathfrak{M}_i$ - имеет $\aleph_1$-категоричную теорию$\}$

Напомним определение категоричности теории:

Определение 2. Полная теория T называется $\aleph_0(\aleph_1)$-*категоричной*, если любые две счётные($\aleph_1$) модели этой теории изоморфны.

Далее в тексте, $\aleph_0(\aleph_1)$-*категоричными моделями*, будем называть модели, имеющие $\aleph_0(\aleph_1)$-категоричную теорию.

Теперь коротко опишем содержание работы. В следующем параграфе мы докажем теорему

Теорема 1. *Индексное множество конечных вычислимых моделей Σ^0_2-полно.*

Далее, в §2, мы определим два теоретико-модельных оператора. Определение этих операторов следует идеям конструкции Маркера из [5] и их модификации из [3], докажем лемму о представлении для Σ^0_2-подмножеств множества натуральных чисел. В §-§3 и 4, мы покажем, как с помощью этой леммы строится нижняя оценка Σ^0_ω индексных множеств вычислимых $\aleph_0(\aleph_1)$-категоричных моделей. В этих двух параграфах мы докажем следующие две теоремы:

Теорема 3. *Индексное множество вычислимых моделей с $\aleph_0$-категоричными теориями содержит Σ^0_ω-полное множество и лежит классе $\Pi^0_{\omega+3}$.*

Теорема 4. *Индексное множество вычислимых моделей с $\aleph_1$-категоричными содержит Σ^0_ω-полное множество.*

Слова "модель" и "структура" будут взаимозаменять друг друга. Определение функций $l, r, \langle\cdot,\cdot\rangle$ стандартное [4].

1. Конечные вычислимые модели

Оценим здесь сложность индексного множества всех конечных вычислимых моделей: $\mathbf{K} = \{i \mid \mathfrak{M}_i\text{– конечная модель}\}$. Вычислимая модель *конечна*, когда множество её элементов конечно. Поскольку основное множество модели вычислимо, то проверка условия конечности это Σ^0_2-формула:

$$\exists x \forall y\ (M_i(y) \to y \leqslant x).$$

Поскольку множества M_i равномерно вычислимы по i, то вычислим номер n множества M_i в стандартной вычислимой нумерации W вычислимо-перечислимых множеств. Так как W_n вычислимо, то проверка условия $W_n(y)$ эффективна. Таким образом получаем Σ^0_2-формулу:

$$\exists x \forall y\ (W_n(y) \to y \leqslant x).$$

То есть $\mathbf{K} \in \Sigma^0_2$, теперь оценим наше индексное множество снизу.

Теорема 1. *Множество* $\mathbf{K}$ Σ^0_2*-полно.*

Доказательство. Покажем, что произвольное Σ^0_2-множество A m-сводится к $\mathbf{K}$ Пусть $A = \{n \mid \exists x \forall y H(n,x,y)\}$. Построим по шагам множество $M = \bigcup\limits_t M^t$.

Шаг 0: $M^0 = \{0\}$.

Шаг t: вычисляем все $H(n,x,y)$ для всех $x \leqslant t$, $y \leqslant t$. Если выполняется $(\exists a \leqslant t)(\forall b \leqslant t) H(n,a,b)$, то полагаем $M^{t+1} = M^t$, иначе $M^{t+1} = \{0, \ldots, t+1\}$. Конструкция завершена.

Допустим теперь, что существует такой a, что $\forall b H(n,a,b)$. Тогда начиная с шага a имеем:

$$\exists a \leqslant t \forall b \leqslant t H(n,a,b), M^t = M^a.$$

Значит $|\bigcup\limits_t M^t| \leqslant a$. То есть M - конечно.

Если же $\forall a \exists b \neg H(n,a,b)$, то мы будем бесконечно часто получать $M^t =$ $= \{0, \ldots, t\}$. Следовательно, $M = \omega$. $\square$

2. Маркеровские расширения

Пусть $\Sigma = \{P^k\}$ предикатная сигнатура и пусть $\mathfrak{M} = \langle A, P^k \rangle$ некоторая структура языка Σ. Предполагаем, что для предиката P этой структуры оба множества $M^k \setminus P$ и P бесконечны.

Далее мы, заимствуя формулировки из [3], несколько модифицируем определение $\exists$ и $\forall$ расширений.

Определение 2.1. *Маркеровское $\exists$-расширение* этого предиката обозначим через $P_\exists$ и определим следующим образом. Пусть X некоторое бесконечное множество, не пересекающееся с M. Тогда $P_\exists$, как предикат арности $k+1$, удовлетворяет следующим свойствам:

1$\exists$) Если $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$, то $P(a_1, \ldots, a_k)$ и $a_{k+1} \in X$.

2$\exists$) Для любого $a \in X$ существует единственный k-набор $(a_1, \ldots, a_k)$ такой, что $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

3$\exists$) Если $P(a_1, \ldots, a_k)$, то существует единственное a такое, что $P_\exists(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

Маркеровское $\forall$-расширение предиката P обозначим через $P_\forall$ и определим следующим образом. Пусть X некоторое бесконечное множество не пересекающееся с M. Тогда $P_\forall$ определяется как предикат арности $k+1$ удовлетворяющий следующим свойствам[1]:

1$\forall$) Для любого набора $(a_1, \ldots, a_k) \in M^k$ существует не более одного элемента $a_{k+1} \in X$ такого, что $\neg P_\forall(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$.

2$\forall$) Если $P_\forall(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$ для всех $a_{k+1} \in X$, то $P(a_1, \ldots, a_k)$.

3$\forall$) Для любого $a \in X$ существует единственный k-набор $(a_1, \ldots, a_k)$ такой, что $\neg P_\forall(a_1, a_2, \ldots, a_k, a)$.

Назовем множество X в любом $\exists$-($\forall$-)расширении *спутником* P.

Определим нашу модель.

[1] В отличие от определения в [3], здесь мы не требуем, чтобы выполнялось условие: если $P(a_1, \ldots, a_k, a)$, то $(a_1, \ldots, a_k) \in A$ и $a \in X$.

Определение 2.2. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, P^k \rangle$ – произвольная модель с одним предикатом.

(1) Модель $\mathfrak{M}_\exists$ определим равной $\langle M \cup X, P^{k+1}, X \rangle$, где предикат P^{k+1} совпадает с маркеровским $\exists$-расширением P^k со спутником X.

(2) Аналогично, $\mathfrak{M}_\forall$ определим равной $\langle M \cup X, P^{k+1}, X \rangle$, где предикат P^{k+1} совпадает с маркеровским $\forall$-расширением P^k со спутником X.

Для слова w в алфавите $\{\exists, \forall\}$ определим $\mathfrak{M}_w$ по индукции:

(1) если $w = e$, то $\mathfrak{M}_w = \mathfrak{M}$;

(2) если $w = w'\exists$, то $\mathfrak{M}_w = (\mathfrak{M}_{w'})_\exists$;

(3) если $w = w'\forall$, то $\mathfrak{M}_w = (\mathfrak{M}_{w'})_\forall$.

Мы воспользуемся результатом, полученным С.С. Гончаровым и Б. Хусаиновым в [3] о том, что эти конструкции сохраняют категоричность:

Следствие 2.1 (из теоремы 3, [3])**.** *Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, P^k \rangle$ некоторая структура, а w слово в алфавите $\{\exists, \forall\}$. Следующие свойства справедливы для нашей конструкции:*

(1) *Модель $\mathfrak{M}$ определима в $\mathfrak{M}_w$.*

(2) *Если теория модели $\mathfrak{M}$ $\aleph_0$-категоричная ($\aleph_1$-категоричная), то такова и теория модели $\mathfrak{M}_w$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая: (а) $w = \exists$ и (б) $w = \forall$. Остальные будут следовать из индукционного перехода.

Пусть X – спутник, необходимый для предиката P^k. Множество M можно определить предикатом $\neg X(x)$. В случае (а) предикат P^k определяется формулой $\exists x P^{k+1}(x_1, \ldots, x_k, x)$, ввиду пункта (1$\exists$) определения. В случае (б) предикат P^k определяется формулой $\forall x P^{k+1}(x_1, \ldots, x_k, x)$, ввиду пункта (2$\forall$) определения.

Доказательство $\aleph_0$- и $\aleph_1$-категоричности следует из того факта, что каждый элемент в любом из маркеровских расширений является алгебраическим над оригинальным базисным множеством $\mathfrak{M}$ структуры $\mathfrak{M}_\exists(\mathfrak{M}_\forall)$. В самом деле, предположим, что $a \in X$ и X спутник предиката P. В случае (а) существует единственный набор $(a_1, \ldots, a_k)$ в множестве $\mathfrak{M}$ такой, что выполнено $P_\exists(a_1, \ldots, a_k, a)$, ввиду пункта (2$\exists$) определения. Аналогично, в случае (б) существует единственный набор $(a_1, \ldots, a_k)$ в основном множестве $\mathfrak{M}$ такой, что $\neg P_\forall(a_1, \ldots, a_k, a)$, ввиду пункта (3$\forall$) определения. $\square$

Следующей нашей задачей будет показать, как алгоритмически можно упрощать модель переходя к её $\exists\forall$-расширению.

Определение 2.3. Σ^0_2–множество A называется *однозначно представимым*, если для некоторого вычислимого предиката $Q \subset \omega^3$ выполнены следующие условия:

(1) для каждого $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, если и только если $n \in A$.

(2) для каждого $n \in \omega$, $\exists a \forall b Q(n, a, b)$, если и только если $\exists^{=1} a \forall b Q(n, a, b)$ [2].

(3) для любого b существует единственная пара $\langle n, a \rangle$ такая, что $\neg Q(n, a, b)$.

(4) для любой пары $\langle n, a \rangle$ либо $\exists b \neg Q(n, a, b)$, либо $\forall b Q(n, a, b)$.

(5) для любого a существует единственное n такое, что $\forall b Q(n, a, b)$.

Лемма 2.1. *Пусть A кобесконечное Σ^0_2–множество, содержащее вычислимое подмножество S такое, что $A \backslash S$ бесконечно и для каждого $i \in \omega$ S содержит бесконечно много элементов $\langle i, x \rangle$. Тогда A имеет однозначное представление.*

Доказательство леммы. Для Σ^0_2–множества A существует вычислимое множество H такое, что $n \in A \Leftrightarrow \exists a \forall b H(n, a, b)$. В действительности, существует вычислимое множество H', для которого $\exists a \forall b H(n, a, b) \Leftrightarrow \exists^{=1} a \forall b H'(n, a, b)$. Чтобы доказать это мы опишем процедуру построения предиката P_n, $n \in \omega$. Чтобы определить P_n вначале мы определяем значения $a_0 = 0$, $r_0 = 0$, $h_0 = 0$. На шаге t предикат P_n будет определен на всех парах (i, j) таких, что $j \leqslant t$,

[2] $\exists^{=1} x P(x)$ означает, что существует единственный x, удовлетворяющий P

$i \leqslant r_t$. Значение для a_t мы будем определять так, что a_t станет единственным свидетелем принадлежности n множеству A т.е., что $n \in A$ если и только если $\forall b P_n(a_t, b)$. Значение для h_t будем определять так, что если $n \in A$, то h_t выдает минимальное значение $h \leqslant t$ для которого $(\forall b \leqslant t) H(n, h, b)$.

Шаг $t+1$. Вычислим $H(n, i, j)$ для всех $i, j \leqslant t+1$. Если выполнено $(\forall i \leqslant t+1)(\exists j \leqslant t+1) \neg H(n, i, j)$, то полагаем $r_{t+1} = r_t + 1$, а h_{t+1} и a_{t+1} будут неопределенными, и определяем $P_n(i, j)$ ложным на всех парах (i, j), для которых $i \leqslant r_{t+1}, j \leqslant t+1$ и на которых предикат P_n еще не был определен. Если значение h_t не определено и условие $\forall j \leqslant t+1 H(n, t+1, j)$ выполнено, то определим $h_{t+1} = t+1$, $r_{t+1} = r_t + 1$, и $a_{t+1} = r_{t+1}$. Полагаем $P_n(a_{t+1}, j)$ истинным для всех $j \leqslant t+1$, и полагаем $P_n(i, j)$ ложным на всех парах, для которых $i \leqslant r_{t+1}, j \leqslant t+1$ и на которых предикат P_n еще не был определен. Если значение h_t определено и условие $\forall j \leqslant t+1 H(n, h_t, j)$ выполнено, то полагаем $h_{t+1} = h_t$, $a_{t+1} = a_t$, $r_{t+1} = r_t + 1$, и определим $P_n(a_{t+1}, j)$ истинным для всех $j \leqslant t+1$, и определим $P_n(i, j)$ ложным на всех (i, j), для которых $i \leqslant r_{t+1}, j \leqslant t+1$ и на которых предикат P_n еще не был определен.

Теперь определим предикат H' следующим образом: $(n, a, b) \in H'$ если и только если $P_n(i, j)$. Теперь можно считать, что для A существует вычислимое множество H такое, что $n \in A$ если и только если $\exists^{=1} a \forall b H(n, a, b)$. Далее определим предикат H_1:

$$H_1(n, a, b) \;\Leftrightarrow\; a = \langle n, x \rangle \;\&\; H(n, x, b).$$

Легко проверить, что формулы $\exists a \forall b H(n, a, b)$ и $\exists a \forall b H_1(n, a, b)$ эквивалентны. Более того, для любого a существует не более одного n такого, что $\forall b H_1(n, a, b)$.

Пусть H_2 определён следующим образом:

$$\neg H_2(n, a, b) \Leftrightarrow b = \langle n, a, x \rangle \& \neg H_1(n, a, x) \;\&\; (\forall z < x) H_1(n, a, z).$$

Нетрудно видеть, что предикат H_2 удовлетворяет следующим свойствам:

(1) Формулы $\exists a \forall b H_1(n, a, b)$ и $\exists a \forall b H_2(n, a, b)$ эквивалентны.

(2) Формулы $\forall b H_1(n, a, b)$ и $\forall b H_2(n, a, b)$ эквивалентны.

(3) Для любой пары n, a существует не более одного b такого, что $\neg H_2(n,a,b)$.

(4) Для любого a существует не более одного n такого, что $\forall b H_2(n,a,b)$.

(5) Для любого b существует не более одной пары (n,a) такой, что $\neg H_2(n,a,b)$.

Таким образом, мы можем предполагать, что H удовлетворяет вышеприведенным свойствам $3)-5)$. Теперь, используя предикат H, мы построим искомый предикат Q.

На шаге t предикат Q_t будет определен на $[0,t] \times [0, r_2(t)] \times [0, r_3(t)]$, где значения функций $r_2(t)$, $r_3(t)$ получаются эффективно на шаге t. Предикат Q_t будет удовлетворять следующим свойствам, обозначаемым через P:

P_1: Для всех $n \leqslant t$, $a \leqslant r_2(t)$ либо $Q_t(n,a,b)$ истинно для всех $b \leqslant r_3(t)$, либо $\exists^{=1} b \leqslant r_3(t) \neg Q_t(n,a,b)$.

P_2: Если $a \leqslant r_2(t)$ является (Q,t)**-свидетелем для** $n \leqslant t$, то есть $\forall b \leqslant r_2(t)$ $Q_t(n,a,b)$, тогда существует единственный (Q,t)-свидетель для n.

P_3: Не существует двойных (Q,t)-свидетелей (которые могут совпадать для различных n_1 и n_2).

P_4: Для каждого $b \leqslant r_3(t)$ существует единственная пара (n,a) такая, что $\neg Q_t(n,a,b)$ и если для каких-то i, z имеем $b = \langle i, 3z+2 \rangle$, то $l(n) = i$.

Пусть $H_0 \subset H_1 \subset \ldots$ будет аппроксимацией H такой, что $H = \bigcup\limits_t H_t$, где $H_t = H \cap [0,t] \times [0,t] \times [0,b_t]$ и b_t минимальный $b \geqslant t$ такой, что выполнены следующие свойства:

(1) Если $a \leqslant t$ является (H,t)**-свидетелем для** $n \leqslant t$ таким, что $\forall j \leqslant b$ $H(n,a,j)$, тогда существует единственный (H,t)-свидетель для n.

(2) Нет двойных (H,t)-свидетелей (которые могли бы совпасть для различных n_1 и n_2).

(3) Для всех $n, a \leqslant t$ либо $(\forall j \leqslant b) H(n,a,b)$, либо $(\exists^{=1} j \leqslant b) \neg H(n,a,j)$.

Заметим, что b_t корректно определен. Если же для некоторого $n \leqslant t$ существует (H,t)-свидетель для n, то мы обозначим его через $h(n,t)$.

Без потери общности, мы предполагаем, что $H(0,0,0)$ истинно. В нашей конструкции на шаге t мы используем функции $r_2(t)$, $r_3(t)$, $h(n,t)$ и $a(n,t)$. Функции $r_2(t)$ и $r_3(t)$ говорят нам, что вторая и третья координаты Q_t не превосходят $r_2(t)$ и $r_3(t)$, соответственно; $h(n,t)$ является (H,t)-свидетелем для n, а $a(n,t)$ является (Q,t)-свидетелем для n, если они существуют. Наша конструкция гарантирует, что $h(n,t)$ определено если и только если $a(n,t)$ определено. В начале мы полагаем $r_2(0)=0$, $r_3(0)=0$, $h(0,0)=0$, и $a(0,0)=0$. Некоторые из номеров $a \leqslant r_2(t)$ будут помечены через $\Box_s$, где $s \in S$. Это будет означать, что конструкция гарантирует, что a является Q-свидетель для s, т.е. $\forall b Q(s,a,b)$.

Опишем теперь шаг t нашей конструкции. Мы предполагаем, что Q_{t-1} определен так, что выполнены все свойства P_1, P_2, P_3, P_4. Дополнительно, мы предполагаем, что каждый элемент $a \leqslant r_2(t-1)$ либо $(Q,t-1)$-свидетель вида $a(n,t-1)$ (для некоторого $n \leqslant t$), либо был отмечен некоторой меткой $\Box_s$ для некоторого $s \in S$.

Шаг t. Если $t \in S$ и некоторый элемент $a \leqslant r_2(t-1)$ отмечен меткой $\Box_t$, то делаем a (Q,t)-свидетелем для t, полагаем $r_2(t)=r_2(t-1)$, $r_3(t)=r_3(t-1)+w(t)$, расширяем Q_{t-1} до Q_t на $[0,t]\times[0,r_2(t)]\times[0,r_3(t)]$, сохраняя всех $(Q,t-1)$-свидетелей как (Q,t)-свидетелей и так, что Q_t удовлетворяет всех свойствам от P_1 до P_4. Заметим, что свойство P_4 может быть удовлетворено, можно увидеть из определения $r_3(t)$, где вычислимая функция $w(t)$ может быть определена из условий: каждому элементу $b=\langle i, 3z+2\rangle$ сопоставляются числа n,a такие, что $l(n)=i \,\&\, \neg Q(n,a,b)$.

В противном случае, поступаем следующим образом.

Вычислим значение H_t. Пусть $i_1,\dots,i_k \leqslant t$ возрастающая цепочка такая, что $h(i_j,t)$ определено и $h(i_j,t) \neq h(i_j,t-1)$, $j=1,\dots,k$. Заметим, что $h(i_j,t-1)$ может быть не определено. Также заметим, что $k \leqslant 2$. Возьмем первые неиспользованные числа s_1 и $s_2 \in S$ такие, что $l(s_j)=l(a(i_j,t-1))$. Отметим каждый элемент $a(i_j, t-1)$ меткой $\Box_{s_j}$ и определяем так, что $a(i_j, t-1)$ является (Q, t')-свидетелем для s_j на всех шагах $t' \geqslant s_j$, $j = 1, \dots, k$. Дальше, возьмем номера $n_1 = r_2(t-1) + u_1(t)$, $\dots$, $n_k = r_2(t-1) + u_k(t)$, где $u_j(t) = \mu z(z > r_2(t-1) \,\&\, l(r_2(t-1) + z) = l(i_k))$. Полагаем $a(i_j, t) = n_j$ для $j = 1, \dots, k$, $r_2(t) = n_k$, $r_3(t) = r_3(t-1) + (k+1)w(t)$, и расширим Q_{t-1} до Q_t на множестве $[0, t] \times [0, r_2(t)] \times [0, r_3(t)]$ делая каждый $a(i_j, t)$ (Q, t)-свидетелем для i_j. На остальных $a \in [r_2(t-1), r_2(t)]$, не равных $a(i_j, t)$ ставим такие ещё не использованные метки s из S, что $l(s) = l(a)$. Сохраняем всех других $(Q, t-1)$-свидетелей как (Q, t)-свидетелей так, что Q_t удовлетворяет всех свойствам начиная с P_1 до P_4. Заметим, что P_4 может быть удовлетворено, как видно из определения $r_3(t)$.

Предположим, что не существует требуемой выше последовательности $i_1, \dots$ $\dots, i_k \leqslant t$. Возьмем первое неиспользованное число $s \in S$ такое, что $l(t) = l(s)$. И отметим t меткой $\Box_s$. Конечно мы определим, что t является (Q, t')-свидетелем для s на всех шагах $t' \geqslant s$. Полагаем $r_2(t) = r_2(t-1) + 1$, и $r_3(t) = r_3(t-1) + {}$ $+ 2w(t) + 1$, и расширим Q_{t-1} до Q_t на множестве $[0, t] \times [0, r_2(t)] \times [0, r_3(t)]$ сохраняя всех $(Q, t-1)$-свидетелей как (Q, t)-свидетелей так, что Q_t удовлетворяет всем свойствам от P_1 до P_4. На этом шаг t заканчивается.

Определим $Q = \cup_t Q_t$. Теперь нетрудно видеть, что Q является однозначным представлением для A. Безусловно, заметим, что на любом шаге t, каждый элемент $a \leqslant r_2(t)$ либо помечен меткой $\Box_s$, либо имеет вид $a(n, t)$. Если a отмечен меткой $\Box_s$, то выполнено $\forall b Q(s, a, b)$, так как a является (Q, t')-свидетелем для s на каждом шаге $t' \geqslant s$. Предположим, что a не помечен меткой $\Box_s$ для $s \in S$. Рассмотрим шаг a. Существует число n такое, что $a = a(n, a)$. Тогда для всех $t \geqslant a$ мы имеем $a(n, t) = a(n, a)$. Поэтому $\forall b Q(n, a, b)$. Таким образом, каждый элемент $a \in \omega$ является Q-свидетелем для некоторого $n \in A$. Все остальные искомые свойства предиката Q следуют из того факта, что Q_t удовлетворяет свойствам от P_1 до P_4 на каждом шаге t. $\Box$

Замечание 1. Если $a \in X_i = \{\langle i, 3x+1\rangle \mid x \in \omega\}$, то существует единственный n такой, что $l(n) = i \,\&\, \forall b\, Q(n,a,b)$. Если $b \in Y_i = \{\langle i, 3x+2\rangle \mid x \in \omega\}$, то существуют единственные n, a такие, что $l(n) = i \,\&\, \neg Q(n,a,b)$.

Доказательство. Из доказательства леммы: каждый a является Q-свидетелем для некоторого $n \in A$. На каждом шаге конструкции мы либо ставим метку $\Box_t$, такую что $l(t) = i$, либо убираем поставленную ранее метку $\Box_t$ для $l(t) = i$ и делаем a (Q,t)-свидетелем для t. Но все (Q,t)-свидетели для n по построению сохраняются для всех $s \geqslant t$.

Существование указанных n, a для $b = \langle i, 3z+2\rangle$ следует из определения функции $r_3(t)$. $\Box$

Ясно, что определение однозначного представления для Σ^0_2–множеств может быть релятивизовано относительно любого оракула X. Релятивизованная версия вышеприведенной леммы дает следующее следствие, которое будет использоваться в следующем параграфе. Мы будем называть его леммой о релятивизованном однозначном представлении.

Лемма 2.2. *Пусть A кобесконечное $\Sigma^{0,X}_2$–множество, содержащее бесконечное X-вычислимое подмножество S такое, что $A \setminus S$ бесконечно и для каждого $i \in \omega$ S содержит бесконечно много элементов $\langle i, x\rangle$. Тогда существует X-вычислимое множество $Q \subset \omega^3$ такое, что Q является однозначным представлением A.* $\Box$

Далее нам потребуется несколько модифицировать предикат, полученный в этой лемме, а затем мы используем его в следующей конструкции. Зафиксируем число $k \geqslant 0$.

Определение 2.4. Возьмём некоторую последовательность $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$,..., $\mathfrak{M}_n$,... счётных вычислимых моделей, где $\mathfrak{M}_i = \langle M_i, P^k_i\rangle$ - модель с одним k-местным предикатом такую, что основные множества равномерно вычислимы по i. Из этих моделей построим большую модель $\mathfrak{N} = \langle \omega, \{M^1_i\}_{i\in\omega}, P^k\rangle$ следующим образом:

(1) $\mathfrak{M}_i \cong_c \langle M_i^{\mathfrak{N}}, P^{\mathfrak{N}} \upharpoonright_{M_i^{\mathfrak{N}}} \rangle$ ($\mathfrak{M}_i$ вычислимо вкладываются в $\mathfrak{N}$ как подмодели);

(2) $M_i^{\mathfrak{N}} = \{\langle i, l\rangle \mid l \in \omega\}$, $\bigcup\limits_{i\in\omega} M_i^{\mathfrak{N}} = \omega$.

(3) доопределяем $\neg P(x,y)$ для $x \in M_i^{\mathfrak{N}}$, $y \in M_j^{\mathfrak{N}}$ $(i \neq j)$.

Назовём эту модель *объединённой для* $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in\omega}$.

Отметим два свойства объединённой модели:

(1) предикаты $M_i^{\mathfrak{N}}$ вычислимы;

(2) модели $\mathfrak{M}_i$ определимы в $\mathfrak{N}$.

В дальнейшем (§4), мы будем рассматривать $\mathfrak{N} = \langle \omega, \{M_i'\}_{i\in\omega}, P^2\rangle$ – модель, которая будет $\mathbf{0}^{(n)}$-разрешимой, и с помощью леммы 2.2 будем преобразовывать её в $\mathfrak{N}' = \langle \omega, \{M_i'\}_{i\in\omega}, P^4\rangle$, $\mathbf{0}^{(n-1)}$-разрешимую модель, выполняя следующее требование:

подмодель $\mathfrak{M}_i' = \langle M_i', P^4 \upharpoonright_{M_i'}\rangle$ должна образовывать
маркеровское $\exists\forall$-расширение модели $\mathfrak{M}_i$.

Затем мы ещё $(n-1)$-раз применим это преобразование и, в итоге, получим вычислимую модель $\mathfrak{N}_n^* = \langle \omega, \{M_i^*\}_{i\in\omega}, P^{2n+2}\rangle$, в которой ограничение предиката $P \upharpoonright_{M_i^*}$ будет в точности маркеровским расширением $P_{i(\exists\forall)^n}$ предиката P_i.

Сформулируем это в виде предложения.

Предложение 2.1. *Пусть* $\mathfrak{N}_0 = \langle \omega, \{M_i'\}_{i\in\omega}, P^2\rangle$ *- объединённая для* $\mathfrak{M}_0$,$\mathfrak{M}_1$,..., $\mathfrak{M}_n$,... $\mathbf{0}^{(n)}$*-вычислимая модель такая, что предикат* P *содержит вычислимое подмножество* S, $P \backslash S$ *- бесконечно и для каждого* $i \in \omega$ S *содержит бесконечное количество элементов* $(\langle i,x\rangle, \langle i,y\rangle)$. *Тогда существует* $\mathbf{0}^{(n-1)}$*-вычислимая модель* $\mathfrak{N}_1 = \langle \omega, \{M_i'\}_{i\in\omega}, P^4\rangle$, *объединённая для* $\mathfrak{M}_0'$,...,$\mathfrak{M}_n'$,... *таких, что для каждого* $i \in \omega$ *выполнено*

(1) $\mathfrak{M}_i$ *определима в* $\mathfrak{M}_i'$;

(2) *если теория модели* $\mathfrak{M}_i$ $\aleph_0$*-категорична (*$\aleph_1$*-категорична), то такова и теория модели* $\mathfrak{M}_i'$.

Доказательство. Определим одноместный предикат A:

$$A(\langle l(x), \langle r(x), r(y)\rangle\rangle) \Leftrightarrow P(x,y)$$

(помним, что для $l(x) \neq l(y)$ $\neg P(x,y)$). С помощью леммы 2.2 по $\mathbf{0}^{(n)}$-вычислимому предикату $A(m)$ получаем $\mathbf{0}^{(n-1)}$-вычислимый предикат $Q(m,a,b)$, который является его однозначным представлением. Множество S преобразуется с сохранением свойств, необходимых в лемме: содержит для каждого $i \in \omega$ бесконечно много элементов $\langle i, \langle x, y\rangle\rangle$.

Можно считать, что предикат Q четырёхместный $\big($будем писать $Q(x,y,a,b)$ вместо $Q(\langle l(x), \langle r(x), r(y)\rangle, a, b)$ $\big)$. По $Q(x,y,a,b)$ строим предикат $R(x,y,a,b)$ такой, чтобы после его построения можно было выделить модели $\mathfrak{M}_0, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$ с их предикатами. В чём необходимость такого перехода? Если мы будем просто строить Q по A, как указано в лемме 2.2, то у нас некоторые элементы (Q-свидетели a для s, t, т.е. такие a, для которых $\forall b Q(s,t,a,b)$) могут не попасть в $\mathfrak{M}_i$ при ограничении предиката Q на элементы $\mathfrak{M}_i$, тогда маркеровость расширения исчезает. Для сохранения маркеровости расширения мы добавим множества X_i, элементы которых будем назначать Q-свидетелями, и элементы $m \in Y_i$, которые отвечают за ложность: $\neg Q(s,t,a,m)$.

Сначала определим предикат $Q_1(x,y,a,b)$:

$$Q_1(x,y,a,b) \Leftrightarrow a = \langle l(x), 3z+1\rangle \ \& \ Q(x,y,z,b).$$

Ясно, что формулы $\exists a \forall b Q(x,y,a,b)$ и $\exists a \forall b Q_1(x,y,a,b)$ эквивалентны. Кроме того, если существует такой z, что $\forall b Q(x,y,z,b)$, то $a = \langle l(x), 3z+1\rangle$, выполняющий формулу $\forall b Q_1(x,y,a,b)$, уже лежит в том же M_i, что и x (из однозначности представления такие z и a единственны).

Далее, определим предикат $R(x,y,a,b)$ следующим образом:

$$\neg R(x,y,a,b) \Leftrightarrow \ \big(b = \big\langle l(x), 3\langle \ div(r(a),3), z \ \rangle + 2\big\rangle \ \& \\ \& \ \neg Q_1(x,y,a,z) \ \& \ (\forall t < z)\, Q_1(x,y,a,t)\big).$$

Ясно, что формулы $\exists a\forall bR(x,y,a,b)$ и $\exists a\forall bQ_1(x,y,a,b)$ эквивалентны. Формулы $\forall bR(x,y,a,b)$ и $\forall bQ_1(x,y,a,b)$ также эквивалентны. Проследим выполнение условий маркеровости расширений предикатов $P_i(x,y) \rightleftharpoons \exists a \in M_i\forall b \in M_i\ R(x,y,a,b)$, $P_{i\exists}(x,y,a) \rightleftharpoons \forall b \in M_i R(x,y,a,b)$, $P_{i\exists\forall}(x,y,a,b) \rightleftharpoons R(x,y,a,b)$ на элементах M_i. Положим $Y_i = \{\langle i, 3x{+}2\rangle \mid x \in \omega\}$ - это $\forall$-спутник $P_\exists$, а множество $X_i = \{\langle i, 3x+1\rangle \mid x \in \omega\}$ - $\exists$-спутник P.

1$\exists$) Пусть $x, y \in M_i$ и $P_{i\exists}(x,y,a)$, тогда $(\forall b \in M_i)R(x,y,a,b)$, т.е.

$$(\forall b \in M_i)\Big(b = \big\langle l(x), 3\langle div(r(a),3), z\rangle + 2\big\rangle \rightarrow \\ \big((\forall t < z)Q_1(x,y,a,t) \rightarrow Q_1(x,y,a,z)\big)\Big).$$

Надо показать, что $a \in X_i$ и $P_i(x,y)$. Если $l(x) \neq l(a)$, то $\neg Q_1(x,y,a,t)$ для любых t (в том числе и для $t = 0$), значит, взяв $b = \big\langle l(x), 3\langle div(r(a),3), 0\rangle + 2\big\rangle$, получаем $\neg P_{i\exists}(x,y,a)$, противоречие. Значит x, y и a попадают в одну M_i и, как мы уже показали ранее, $a \in X_i$.

2$\exists$) Пусть $a \in X_i$, $a = \langle i, 3z{+}1\rangle$. Надо показать, что существуют единственные x, y такие, что $P_{i\exists}(x,y,a)$. Из леммы 2.1 и замечания 1 получаем, что для z существуют такие x, y, что $x \in M_i \,\&\, \forall bQ(x,y,z,b)$. Очевидно, что $a, x \in M_i$ и $y \in M_i$, т.к. если бы y лежал в некотором другом M_j, то предикат $P(x,y)$ был бы ложен. Рассмотрим формулу

$$(\forall b \in M_i)\Big(b = \big\langle l(x), 3\langle z, t\rangle + 2\big\rangle \rightarrow \\ \big((\forall u < t)\,Q_1(x,y,a,u) \rightarrow Q_1(x,y,a,t)\big)\Big).$$

Она истинна, когда $\forall b \in M_i Q_1(x,y,a,b)$ и, в свою очередь, тогда и только тогда, когда $l(x) = i\ \&\ \forall bQ(x,y,z,b)$. Как мы уже показали, такие x, y существуют.

3$\exists$) Предполагаем, что верно $P_i(x,y)$. Тогда из однозначности представления Q существует единственный z такой, что $\forall b \in M_i\ Q(x,y,z,b)$. Значит существует единственный $a = \langle l(x), 3z+1\rangle$, выполняющий $\forall b \in M_iQ_1(x,y,a,b)$. Легко заметить, что только a удовлетворяет $P_{i\exists}(x,y,a)$.

1∀) Покажем, что для любых $x, y \in M_i$,$a \in M_i$ существует не более одного элемента $b \in Y_i$ такого, что $\neg P_{i\exists\forall}(x, y, a, b)$. Допустим, что таких элементов два $b_1, b_2 \in Y_i$. Тогда

$$b_1 = \langle l(x), 3\langle div(r(a), 3), z_1\rangle + 2\rangle,$$

$$b_2 = \langle l(x), 3\langle div(r(a), 3), z_2\rangle + 2\rangle.$$

Пусть $z_1 < z_2$. Тогда, из определения предиката R получаем:

$$R(x, y, a, b_1) \to \neg Q_1(x, y, a, z_1).$$

С другой стороны:

$$R(x, y, a, b_2) \to \forall t < z_2\ Q_1(x, y, a, z_2).$$

Противоречие. Значит таких $b \in Y_i$ не более одного.

2∀) Пусть $\forall b \in M_i P_{i\exists\forall}(x, y, a, b)$. По определению получаем $P_{i\exists}(x, y, a)$.

3∀) Необходимо показать, что для любого $b \in Y_i$ существует единственный набор $x, y, a \in M_i$ такой, что $\neg P_{i\exists\forall}(x, y, a, b)$. Пусть $b = \langle i, 3t + 2\rangle$. Из замечания 1 к лемме 2.1 получаем, что для предиката Q и элемента b существуют такие n, z, что $\neg Q(n, z, b)$ (в обозначениях леммы), причём $l(n) = i$. Возьмём в качестве $x = \langle i, lr(n)\rangle$, $y = \langle i, rr(n)\rangle$. Тогда получаем истинность $\neg Q(x, y, z, b)$ (в обозначениях данного предложения). Берём $a = \langle i, 3z + 1\rangle$.

Далее определяем предикат

$$P^4(x, y, a, b) \Leftrightarrow\ l(x) = l(y) = l(a) = l(b)\,\&\, R(x, y, a, b).$$

□

Обобщим наше предложение на модели с предикатами местности $2k, (k \geqslant 1)$.

Следствие 2.2. *Пусть* $\mathfrak{N}_0 = \langle \omega, \{M'_i\}_{i\in\omega}, P^{2k}\rangle$ *- объединённая для* $\mathfrak{M}_0,\ldots,\mathfrak{M}_n,\ldots$ $\mathbf{0}^{(n)}$*-вычислимая модель такая, что предикат* P *содержит бесконечное вычислимое подмножество* S, $P \setminus S$ *- бесконечно и для каждого* $i \in \omega$ S *содержит бесконечное количество элементов* $(\langle i, x_1\rangle, \ldots, \langle i, x_{2k}\rangle)$. *Тогда существует* $\mathbf{0}^{(n-1)}$*-вычислимая модель* $\mathfrak{N}_1 = \langle \omega, \{M'_i\}_{i\in\omega}, P^{2k+2}\rangle$*, объединённая для* $\mathfrak{M}'_0,\ldots,\mathfrak{M}'_n,\ldots$ *таких, что для каждого* $i \in \omega$ *выполнено*

(1) $\mathfrak{M}_i$ *определима в* $\mathfrak{M}'_i$*;*

(2) *если теория модели* $\mathfrak{M}_i$ $\aleph_0$*-категорична (*$\aleph_1$*-категорична), то такова и теория модели* $\mathfrak{M}'_i$*.*

Доказательство. Определим одноместный предикат A:

$$A(\langle l(x_1), \langle r(x_1), \ldots, r(x_{2k})\rangle\rangle) \Leftrightarrow P(x_1, \ldots, x_{2k}).$$

Далее, доказательство аналогично предыдущему. $\square$

3. Множество вычислимых $\aleph_0$-категоричных моделей

Для оценки сверху индексного множества моделей с $\aleph_0$-категоричными теориями понадобится следующий критерий $\aleph_0$-категоричности.

Теорема 2 (Рылль-Нардзевского)**.** *Теория T $\aleph_0$-категорична тогда и только тогда, когда для каждого n алгебра Линденбаума*[3] $\mathfrak{B}_n(T) = \{[\varphi]_T \mid FV(\varphi) = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}\}$ *конечна.*

Теорема 3. *Индексное множество вычислимых моделей с $\aleph_0$-категоричными теориями содержит Σ^0_ω-полное множество и лежит классе $\Pi^0_{\omega+3}$.*

Доказательство. Оценим сверху множество $\mathbf{C}$. Для этого воспользуемся критерием. Утверждение конечности алгебры Линденбаума формульно записывается так:

$$\forall n \exists k \forall i \exists j \leqslant k \big((FV(\varphi_i) = FV(\varphi_j) = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}) \to \varphi_i \equiv_T \varphi_j \big), \tag{3.1}$$

где φ_i – формула с гёделевским номером i, отношение $\varphi \equiv_T \psi$ означает выводимость секвенции: $T \vdash (\varphi \to \psi) \& (\psi \to \varphi)$. Само это отношение может иметь любую арифметическую сложность в пределах Σ^0_ω, т.к. по теореме Гёделя о полноте, эквивалентно проверке условия: $\mathfrak{M} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \psi$, а φ, ψ – это некоторые $\Sigma^0_n(\Pi^0_n)$-формулы. Следовательно, по алгоритму Тарского-Куратовского, формула (3.1) задаёт $\Pi^0_{\omega+3}$ множество.

Оставшаяся часть доказательства будет посвящена тому факту, что наше индексное множество содержит Σ^0_ω-полное множество.

Для этого надо будет построить такую вычислимую нумерацию $\eta = \{\mathfrak{M}_j\}_{j \in \omega}$ вычислимых счётно категоричных и счётно некатегоричных моделей $\mathfrak{M}_i = \langle \omega, P^2_i \rangle$, к которой можно m-свести любое арифметическое множество. Мы будем сводить множество $\mathbf{0}^{(\omega)} = \{\langle m, n \rangle \mid m \in \mathbf{0}^{(n)}\}$, т.к. оно является полным

[3] $[\varphi]_{\equiv_T} = \{\psi \mid T \vdash (\varphi \to \psi) \& (\psi \to \varphi)\}$

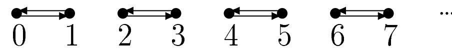

Рис. 3.1. Модель 2-циклов

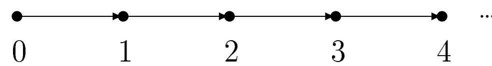

Рис. 3.2. Модель следования

в классе Σ^0_ω. Итак, нам необходимо выполнить условие

$$m \in \mathbf{0}^{(n)} \Leftrightarrow m \in \mathbf{C}.$$

Построим следующую нумерацию вычислимых моделей:

если $m \in \mathbf{0}^{(n)}$, то делаем $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{A}$,

если $m \notin \mathbf{0}^{(n)}$, то делаем $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{B}$.

Где $\mathfrak{A} = \{\omega, P^2\}$ – модель состоящая из 2-циклов (рис.3.1),
а $\mathfrak{B} = \{\omega, P^2\}$ - модель следования (рис.3.2).

В модели $\mathfrak{A}$ выполнены формулы:

(1) $\forall x \neg P(x,x)$ (антисимметричность);

(2) $\forall x \forall y P(x,y) \to P(y,x)$ (симметричность);

(3) $\forall x \exists^{=1} y P(x,y)$ (каждый элемент только в одном цикле).

А в модели $\mathfrak{B}$:

(1) $\forall x \neg P(x,x)$ (антисимметричность);

(2) $\forall x \exists^{=1} y P(x,y)$ (однозначность);

(3) $\forall x \forall z P(x,z) \to \neg P(z,x)$ (нет 2-циклов).

(4) $\forall x \forall z \forall y (P(x,y) \& P(y,z)) \to \neg P(z,x)$ (нет 3-циклов).

...

(n+3) $\forall x \forall z \forall y_1 \ldots \forall y_n (P(x,y_1) \& \ldots \& P(y_n,z)) \to \neg P(z,x)$ (нет $n+2$-циклов).

...

Покажем, что модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обладают нужными нам свойствами, то есть:

1) теория $Th(\mathfrak{A})$ счётно категорична.

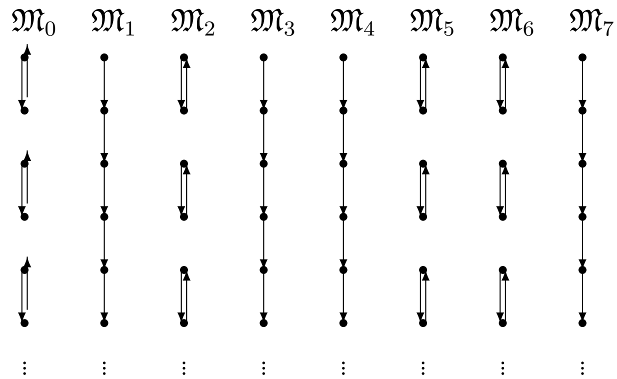

Рис. 3.3. Пример объединённой модели

2) теория $Th(\mathfrak{B})$ счётно некатегорична.

1) Возьмём другую модель $\mathfrak{N}$ этой теории. В ней также будут 2-циклы и каждый элемент связан только с одним 2-циклом. Можно установить взаимнооднозначное соответствие между циклами, т.к. их и в $\mathfrak{A}$ и в $\mathfrak{N}$ счётное количество.

2) Утверждение следует из того, что существуют счётные нестандартные модели этой теории (типа $\omega + \omega$), а нестандартная модель неизоморфна стандартной. То есть теория допускает две счётных неизоморфных модели и, следовательно, не является счётно категоричной.

Рассмотрим модель $\mathfrak{N}_0 = \langle \bigcup\limits_{i \in \omega} \mathfrak{M}_i \mid M_i^1, P^2 \rangle$, объединённую для $\{\mathfrak{M}_i\}_{i \in \omega}$, где предикат P сделаем ложным на элементах $x \in M_i$, $y \in M_j$ для $i \neq j$. Эта модель представляет собой раздельное объединение всех моделей нумерации η, для каждой из которых добавляется свой предикат (выделяющий эту модель) и предикат P, который на элементах $\mathfrak{M}_i$ совпадает с P_i (пример на рис.3.3).

Эта модель $\mathbf{0}^{(n)}$-разрешима, т.к.

$$P(x, y) \Leftrightarrow \exists i \; x, y \in \mathfrak{M}_i \& P_i(x, y)$$

$$\Leftrightarrow l(x) = l(y) \,\&$$

$$\& \big(l(x) \in \mathbf{0}^{(n)} \to \exists t \leqslant x(x = 2t \& y = 2t + 1) \vee (y = 2t \& x = 2t + 1)\big) \,\&$$

$$\& \big(l(x) \notin \mathbf{0}^{(n)} \to (x + 1 = y)\big).$$

Нам необходимо, чтобы предикат P стал равномерно вычислим относительно нумерации η. Для этого мы будем расширять местность предиката и перестраивать его, сохраняя (не-)категоричность подмоделей $\mathfrak{M}_i$.

Положим $S = \{(\langle i, 2t\rangle, \langle i, 2t+1\rangle) \,|\, t \in \omega\}$. Заметим, что $S \subset P$. Ясно, что S – бесконечно, вычислимо и для каждого i содержит бесконечно много элементов $(\langle i, 3x+1\rangle, \langle i, 3x+2\rangle)$.

По предложению 2.1 существует модель $\mathfrak{N}_1 = \langle \omega, \{M'_i\}_{i\in\omega}, P^4\rangle$, что:

$$\langle M_i, P^2 \restriction_{M_i}\rangle_{\exists\forall} \cong_c \langle M'_i, P^4 \restriction_{M_i}\rangle.$$

То есть каждая из $\mathfrak{M}'_i$ является $\exists\forall$-расширением $\mathfrak{M}_i$. Далее строим модель $\mathfrak{N}_2$ с шестиместным предикатом P_2, вычислимым с $\mathbf{0}^{(n-2)}$ и т.д. до $\mathfrak{N}_n$ с P_n^{2n+2}, который уже будет вычислим и модель $\mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}$ будет вычислимой. Затем, мы развернём эту модель в вычислимую нумерацию ξ вычислимых моделей $\{\mathfrak{M}_i^{(n)}\}_{i\in\omega}$, для которой будет верно:

$m \in \mathbf{0}^{(n)} \Rightarrow \mathfrak{M}_m^{(n)}$ - $\aleph_0-$категоричная модель,

$m \notin \mathbf{0}^{(n)} \Rightarrow \mathfrak{M}_m^{(n)}$ - не $\aleph_0-$категоричная модель.

Таким образом мы m-свели Σ^0_ω-полное множество $\mathbf{0}^{(\omega)}$ к множеству $\mathbf{C}$. $\square$

4. Множество вычислимых $\aleph_1$-категоричных моделей

Теорема 4. *Индексное множество вычислимых моделей с $\aleph_1$-категоричным содержит Σ^0_ω-полное множество.*

Доказательство. Для оценки снизу индексного множества моделей с $\aleph_1$-категоричными теориями используем ту же конструкцию, что и в предыдущем параграфе. Строим нумерацию:

если $m \in \mathbf{0}^{(n)}$, то делаем $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{A}$,

если $m \notin \mathbf{0}^{(n)}$, то делаем $\mathfrak{M}_m = \mathfrak{B}$.

Здесь в качестве $\mathfrak{A}$ положим $\aleph_1$-категоричную модель, а вместо $\mathfrak{B}$ - не $\aleph_1$-категоричую. Например, $\mathfrak{A}$ - модель следования (см. рис.3.2). А модель $\mathfrak{B}$ - вычислимый плотный линейный порядок. Множество S можно взять то же, что и в доказательстве теоремы 3. $\square$

Заключение

В данной работе была дана точная оценка сложности индексного множества вычислимых конечных моделей, а также приведены нижние и верхние оценки сложности индексных множеств вычислимых моделей с $\aleph_0$ и $\aleph_1$ категоричными теориями. В качестве продолжения работы можно рассматривать вопросы об оценке следующих индексных множеств:

- однородные модели;
- простые модели;
- насыщенные модели;
- допускающие разрешимое представление (допускающие n-разрешимое представление);
- автоустойчивые модели;
- модели бесконечной алгоритмической размерности;
- модели конечной алгоритмической размерности;
- с тотально-транзитивной ($\aleph_0$-стабильной) теорией;
- автоустойчивые относительно Δ_α-изоморфизмов;
- модели, для которых существует вычислимое семейство Скотта (Δ_α-вычислимое семейство Скотта).

Список литературы

1. С.С.Гончаров, Ю.Л.Ершов. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
2. С.С.Гончаров, Дж.Найт. Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы. Алгебра и логика, 41, 2002, N 6, 639-681.
3. С.С. Гончаров, Б.Х.Хусаинов. Сложность теорий вычислимых категоричных моделей. Алгебра и логика, 43, 2004, N 6, 650-665.
4. Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
5. D. Marker. Non-Σ_n-axiomatizable almost strongly minimal theories. J. Symbolic Logic, 54, 1989, 921-927.